I moti turbolenti

Quando il numero di Reynolds assume valori elevati non è più possibile individuare deterministicamente i valori delle grandezze caratteristiche del moto poiché essi compaiono in modo "casuale" (sono variabili aleatorie). Si usano i valori medi:

$$\bar f(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\cdot p(f)\cdot df \qquad \bar f(\underline{x},t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j(\underline{x},t)$$

I valori caratteristici del moto sono la somma del valor medio e di una parte oscillante (con media nulla):

$$\underline{V} = \bar{\underline{v}}(\underline{x},t) \qquad P = \bar p(x,t)$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \bar{\underline{v}} + \underline{v}' = \underline{V} + \underline{v}' \qquad \Rightarrow p = \bar p + p' = P + p'$$

Con $\overline{\underline{v}'}=0$, $\overline{p'}=0$, $\overline{\underline{V}}=\underline{V}$ e $\bar P = P$. Applichiamo l'operazione di media all'equazione di continuità con $\rho = cost$:

$$\nabla\cdot\underline{v}=0 \Rightarrow \overline{\frac{\partial(\bar v_1+v_1')}{\partial x_1}+\frac{\partial(\bar v_2+v_2')}{\partial x_2}+\frac{\partial(\bar v_3+v_3')}{\partial x_3}} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{\frac{\partial(\bar v_1+v_1')}{\partial x_1}}+\overline{\frac{\partial(\bar v_2+v_2')}{\partial x_2}}+\overline{\frac{\partial(\bar v_3+v_3')}{\partial x_3}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\bar{\bar v}_1+\overline{v_1'})}{\partial x_1}+\frac{\partial(\bar{\bar v}_2+\overline{v_2'})}{\partial x_2}+\frac{\partial(\bar{\bar v}_3+\overline{v_3'})}{\partial x_3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar v_3}{\partial x_3}=0 \Rightarrow \nabla\cdot\bar{\underline{v}}=0$$

Inoltre $\overline{\nabla\cdot\underline{v}} = \nabla\cdot(\bar{\underline v}+\underline v') = \underbrace{\cancel{\nabla\cdot\bar{\underline v}}}_{=0} + \nabla\cdot\underline v' = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\underline v'=0$. Applichiamo ora l'operazione di media anche all'equazione di Navier-Stokes lungo x_i:

$$\rho\left[\overline{\frac{\partial(\bar v_i+v_i')}{\partial t}} + \overline{(\bar v_j+v_j')\cdot\frac{\partial(\bar v_i+v_i')}{\partial x_j}}\right] = \rho\bar f_i - \overline{\frac{\partial(\bar p+p')}{\partial x_i}} + \mu\overline{\frac{\partial^2(\bar v_i+v_i')}{\partial x_l\partial x_l}}$$

Consideriamo il secondo termine della parentesi quadra:

$$\overline{(\bar v_j+v_j')\cdot\frac{\partial(\bar v_i+v_i')}{\partial x_j}} = \bar v_j\cdot\frac{\partial\bar v_i}{\partial x_j} + \underbrace{\cancel{\overline{\bar v_j\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\overline{v_j'\cdot\frac{\partial\bar v_i}{\partial x_j}}}}_{=0} + \overline{v_j'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}$$

Nei due termini eliminati compare una grandezza costante ($\bar v$) e una variabile (v'); per questo l'operazione di media può essere spezzata e si può sfruttare il fatto che le oscillazioni hanno media nulla. Il quarto termine non può essere eliminato poiché la media non può essere spezzata sulle due grandezze variabili (in realtà è sempre v').
Otteniamo (eliminando le medie sulle oscillazioni):

$$\rho\left[\frac{\partial\bar v_i}{\partial t}+\bar v_j\cdot\frac{\partial\bar v_i}{\partial x_j}+\overline{v_j'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}\right] = \rho f_i - \frac{\partial\bar p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\bar v_i}{\partial x_l\partial x_l}$$

Aggiungiamo $\frac{\partial v_j'}{\partial x_j}=0$:

$$\rho\left[\frac{\partial\bar v_i}{\partial t}+\overline{\frac{\partial v_j'}{\partial x_j}}+\bar v_j\cdot\frac{\partial\bar v_i}{\partial x_j}+\overline{v_j'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}\right] = \rho f_i-\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\bar v_i}{\partial x_l\partial x_l}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial\bar v_i}{\partial t}+\bar v_j\cdot\frac{\partial\bar v_i}{\partial x_j}+\overline{\frac{\partial(v_i'v_j')}{\partial x_j}}\right] = \rho f_i-\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2\bar v_i}{\partial x_l\partial x_l}$$

Abbiamo ottenuto l'equazione di Reynolds.

L'equazione di Reynolds e il tensore delle tensioni di Reynolds

Il problema ottenuto dalle operazioni di media è tuttora irrisolto per la presenza delle incognite $\frac{\partial \overline{(v_i' \cdot v_j')}}{\partial x_j}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho\left[\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{(v_i' v_j')}}{\partial x_j}\right] = \rho f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_l \partial x_l} \end{cases}$$

Tale termine è equiparabile a una tensione e permette di definire il tensore delle tensioni di Reynolds:

$$\mathbb{T}^R = \begin{pmatrix} -\rho\overline{(v_1' v_1')} & -\rho\overline{(v_1' \cdot v_2')} & -\rho\overline{(v_1' v_3')} \\ -\rho\overline{(v_2' v_1')} & -\rho\overline{(v_2' \cdot v_2')} & -\rho\overline{(v_2' \cdot v_3')} \\ -\rho\overline{(v_3' \cdot v_1')} & -\rho\overline{(v_3' \cdot v_2')} & -\rho\overline{(v_3' \cdot v_3')} \end{pmatrix}$$

Possiamo ottenere l'equazione di Reynolds dall'equazione di Cauchy modificando il tensore delle tensioni nel modo seguente:

$$T_{ij} = -p\,\delta_{il} + \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial x_i}\right) - \rho\,\overline{v_i' v_l'}$$

Il "problema di chiusura dei moti turbolenti" è tuttora aperto poiché vi sono più incognite che equazioni: alle quattro incognite $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ e $\bar{p}$ (corrispondenti alle quattro equazioni del sistema scritto sopra) si aggiungono le sei incognite da $\frac{\partial \overline{(v_i' v_j')}}{\partial x_j}$.

L'ipotesi di Boussinesq

Per superare il problema manifestatosi Boussinesq introdusse la seguente ipotesi (spesso utilizzata nonostante i limiti che presenta):

$$T^R_{ij} = -\rho\,\overline{v_i' v_j'} = \mu_T\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\,\delta_{ij} \cdot E_{ct} = 2\mu_T \bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} E_{ct}\,\delta_{ij}$$

Si aggiunge E_{ct} derivante da (energia cinetica della turbolenza):

$$E_c = \frac{1}{2}\rho\, v_i \cdot v_j = \frac{1}{2}\rho(\bar{v}_i + v_i')\cdot(\bar{v}_i + v_i') \Rightarrow \bar{E}_c = \frac{1}{2}\rho\left(\overline{\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i} + \underbrace{\cancel{\overline{\bar{v}_i \cdot v_i'}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\overline{v_i' \cdot \bar{v}_i}}}_{=0} + \overline{v_i' \cdot v_i'}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{E}_c = \frac{1}{2}\rho\left(\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i + \overline{v_i' \cdot v_i'}\right) \Rightarrow E_{ct} = \frac{1}{2}\rho\,\overline{(v_i' \cdot v_i')}$$

Con l'aggiunta di tale E_{ct} accompagnato dal δ di Kronecker si evita che si annulli la seguente somma:

$$T_{11}^{(R)} + T_{22}^{(R)} + T_{33}^{(R)} = -\rho\overline{v_1' v_1'} - \rho\overline{v_2' v_2'} - \rho\overline{v_3' v_3'} = \underbrace{2\mu_T \nabla \cdot \bar{v}}_{=0} - 2E_{ct} = -2E_{ct}$$

Introducendo l'ipotesi di Boussinesq è necessario determinare una nuova incognita, μ_T (oppure $\nu_T = \mu_T/\rho$), viscosità turbolenta. Supponendo una dipendenza da l e u_0 (dimensione e velocità caratteristiche dei macrovortici), sarà necessario scoprire i valori di l e u_0 stessi. Si usano modelli a zero equazioni (l e u_0 desunti da relazioni algebriche, non differenziali) o a una o due equazioni (dal numero di equazioni differenziali introdotte).

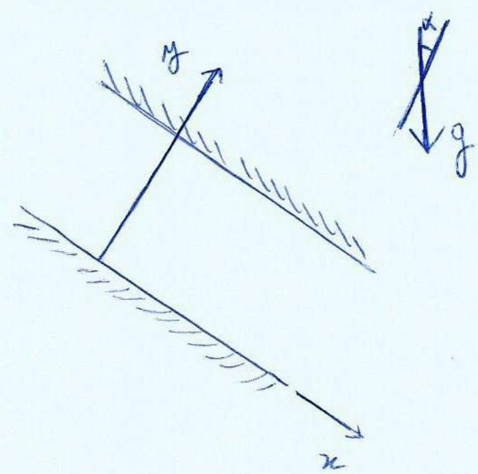
<u>Moto turbolento nel meato</u>

Nel caso del meato stiamo trattando un moto bidimensionale uniforme. Vediamo come si modifica l'equazione di Reynolds lungo x:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \cancel{\bar{v}}_{=0} + v' = v' \\ w = \cancel{\bar{w}}_{=0} + w' = w' \end{cases}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\cdot\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z}\right] = \rho f_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z \partial z}\right]$$

Con meato inclinato e stazionarietà si ottiene:



$$\rho g \operatorname{sen}\alpha - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho\overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right) = 0$$

Per stazionarietà $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, inoltre $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$, $\bar{v}$ e $\bar{w}$ sono nulli, $\bar{u}$ varia solo lungo y (rimane quindi solo $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$). Anche $\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'u'}) = 0$ poiché il campo di moto non dipende da x. Ricordando che $+\rho g \operatorname{sen}\alpha = -\rho g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ e sommando $-\rho g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\gamma\frac{\partial h}{\partial x} = +\gamma i$ (infatti $\eta + \frac{p}{\gamma} = h$) si ottiene infine:

$$-\gamma i = \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right)$$

Scriviamo anche l'equazione rispetto a y:

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}} + \cancel{\bar{u}\cdot\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}} + \cancel{\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}} + \cancel{\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}}\right] = -\rho g\cos\alpha - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho\overline{v'u'}\right)} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'v'}\right) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho\overline{v'w'}\right)}$$

$$\Longrightarrow -\gamma\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'v'}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(h + \frac{\overline{v'\cdot v'}}{g}\right) = 0$$

Mentre h è nell'ordine della decina di metri, le oscillazioni di v sono nell'ordine di 10^{-2} m/s. Il secondo termine contenuto nella derivata è quindi trascurabile. Essendo dunque $\frac{\partial h}{\partial y} \approx 0$ si ha $h \simeq h(x)$

Tornando all'equazione lungo x, se non ci fosse $\rho\overline{u'v'}$ otterremmo subito la $\bar{u}$. Invece:

$$-\gamma i = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(-\rho\overline{u'v'}\right) + \mu\frac{d\bar{u}}{dy}\right] \Longrightarrow \underbrace{-\rho\overline{u'v'}}_{\text{Turbolenta}} + \underbrace{\mu\frac{d\bar{u}}{dy}}_{\text{Viscosa}} = -\gamma i y + \text{costante}$$

Cioè $\tau(y) = -\gamma i y + \text{costante}$; sfruttando la simmetria si ricava la costante:

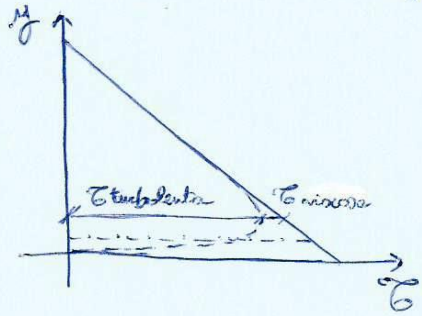
$$\tau(0) = \text{costante} = -\tau(d) = \gamma i d - \text{costante} \Longrightarrow \text{costante} = \gamma i \frac{d}{2}$$

$$\Longrightarrow \tau(y) = \gamma i\left(\frac{d}{2} - y\right), \quad \tau_0 = \gamma i\frac{d}{2}$$

A questo punto è necessario introdurre un modello di turbolenza per poter esprimere $-\rho\overline{u'v'}$ e trovare una soluzione al problema.

Modello turbolento a zero equazioni per il moto

Vediamo l'andamento grafico della tensione tangenziale:



In una sottilissima fascia (diciamo di millimetro) c'è solo contributo viscoso. Si trova a contatto con la parete.
Essendo $y \to 0$ si ha:

$$\tau_0 = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \Leftrightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{d\bar{u}}{dy} \Rightarrow \bar{u} = \frac{\tau_0}{\rho\nu} y$$

Con costante di integrazione nulla essendo $u=0$ in $y=0$. Lo strato in cui la $\bar{u}$ è lineare con y è detto "substrato viscoso". Introdotta la velocità d'attrito $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$ si ottiene $\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau \cdot y}{\nu}$

Dopo il substrato viscoso si incontra lo strato di equilibrio, ancora per $y \ll d/2$, ma $y \gg \nu/u_\tau$. Lo strato è sufficientemente lontano dalla parete, oltre quello viscoso, ma abbastanza vicino da poter assumere $\tau = \tau_0$.
Introduciamo il modello a zero equazioni fornendo un'espressione algebrica di ν_T:

$$\nu_T = K \cdot u_\tau \cdot y$$

Con $K \simeq 0,4$ costante di Von Karman. Abbiamo quindi:

$$K \cdot u_\tau\, y \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} = u_\tau^2 \Rightarrow \int d\bar{u} = \frac{u_\tau}{K}\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \bar{u} = \frac{u_\tau}{K} \cdot \ln|y| + \text{cost}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{K} \cdot \ln \frac{y}{\text{cost}} \simeq 2,5 \ln \frac{y}{\text{cost}}$$

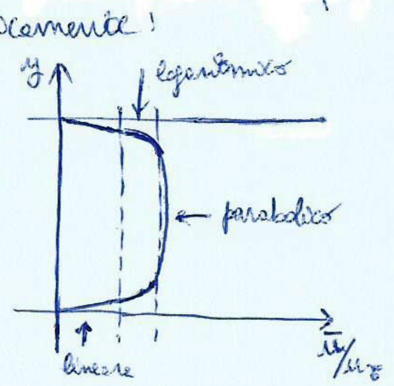
La costante ha differenti valori a seconda che la parete sia liscia o scabra:

- parete liscia: le rugosità sono interamente contenute nel substrato viscoso:
$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 11,6 \text{ per } y = 11,6 \frac{\nu}{u_\tau} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2,5 \ln \frac{y \cdot u_\tau}{11,6\,\nu} + 11,6 = 2,5 \cdot \ln \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} + 5,5$$
- parete scabra: le rugosità della parete invadono completamente il substrato viscoso (definito da $y < \frac{5\nu}{u_\tau}$):
$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 0 \quad \text{per } y = \frac{y_R}{30} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2,5 \cdot \ln \frac{y \cdot 30}{y_R}$$

Ancora oltre lo strato di equilibrio c'è il nucleo turbolento (oltre $0,1d$ le tensioni non sono più sensibilmente influenzate dalla presenza della parete).
Il profilo di velocità è parabolico:

$$\rho \cdot K \cdot u_\tau \cdot 0,1 \cdot d \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} = \gamma\, i \left(\frac{d}{2} - y\right)$$

Graficamente:



La velocità è maggiore nel moto laminare, che risente meno delle resistenze viscose. Tuttavia il gradiente di pressione riesce a separare prima uno strato laminare piuttosto che uno turbolento. Vi sono inoltre le resistenze di forma che favoriscono il moto turbolento riducendo il distacco dei vortici, fenomeno talvolta pericoloso. Per questo palline da tennis e da golf sono fatte in modo da innescare subito il moto turbolento

L'energia cinetica della turbolenza

Moltiplichiamo l'equazione di Navier-Stokes nella direzione x_i per v_i':

$$v_j'\cdot\rho\left(\frac{d\bar v_j}{dt}+\frac{dv_j'}{dt}\right) = v_i'\cdot\rho\cdot f_i - v_i'\frac{\partial\bar p}{\partial x_i} - v_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \mu v_i'\cdot\frac{\partial^2\bar v_i}{\partial x_l\partial x_l} + \mu v_i'\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_l\cdot\partial x_l}$$

Eseguendo l'operazione di media molti termini si semplificano:

$$\overline{v_j'\cdot\rho\left(\frac{d\bar v_j}{dt}+\frac{dv_j'}{dt}\right)} = -\overline{v_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \mu\overline{v_i'\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_l\cdot\partial x_l}}$$

Il I membro dell'equazione può essere riscritto sfruttando le derivate parziali:

$$\overline{v_j'\rho\left[\frac{\partial\bar v_j}{\partial t}+\frac{\partial v_j'}{\partial t}+(\bar v_m+v_m')\cdot\frac{\partial(\bar v_j+v_j')}{\partial x_m}\right]} = -\overline{v_i'\cdot\frac{\partial p'}{\partial x_i}}+\mu\overline{v_i'\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_l\partial x_l}}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)+\rho\overline{v_j'\cdot v_m'}\cdot\frac{\partial\bar v_j}{\partial x_m}+\rho\overline{v_j'v_m'\cdot\frac{\partial v_j'}{\partial x_m}}+\rho\overline{v_j'\cdot\bar v_m\cdot\frac{\partial v_j'}{\partial x_m}} =$$
$$= -\overline{v_i'\cdot\frac{\partial p'}{\partial x_i}}+\mu\overline{v_i'\cdot\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_l\partial x_l}}$$

$$\Rightarrow \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)+\bar v_m\cdot\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)\right] =$$
$$= -\rho\overline{v_l'v_m'}\cdot\frac{\partial\bar v_l}{\partial x_m}-\rho\overline{v_l'v_m'\cdot\frac{\partial v_l'}{\partial x_m}}-\overline{v_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}}+\mu\overline{v_i'\frac{\partial^2v_i'}{\partial x_l\cdot\partial x_l}}$$

Abbiamo scritto direttamente i termini mediati non nulli e talvolta cambiato gli indici affinché fosse sempre mantenuta la convenzione di Einstein. Aggiungiamo $-\overline{p\frac{\partial v_l'}{\partial x_l}}=0$ a secondo membro per poter portare v_i' dentro la derivata $\frac{\partial p'}{\partial x_i}$; scriviamo inoltre in due termini $\mu\overline{v_i'\frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_l\cdot\partial x_l}}$:

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)+\bar v_m\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)\right] = -\rho\overline{v_l'v_m'}\cdot\frac{\partial\bar v_l}{\partial x_m}-\rho\overline{v_l'v_m'\cdot\frac{\partial v_l'}{\partial x_m}}+$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_l}\overline{(v_l'\cdot p')}+\mu\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\overline{v_i'\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}}\right]-\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}}$$

Compare $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)=\frac{\partial E_{ct}}{\partial t}$, mentre $\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac12\overline{v_j'v_j'}\right)=\frac{\partial E_{ct}}{\partial x_m}=0$. Eseguiamo ancora due passaggi:

$$\rho\frac{\partial E_{ct}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left[-\overline{v_l'p'}+\mu\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac12\overline{v_i'v_i'}\right)\right]-\rho\overline{v_l'v_m'}\cdot\frac{\partial\bar v_l}{\partial x_m}-\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}}+$$
$$-\rho\overline{v_m'\cdot\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac12 v_l'v_l'\right)}-\rho\overline{\frac12 v_l'\cdot v_l'\cdot\frac{\partial v_m'}{\partial x_m}} =$$
$$= \underbrace{-\rho\overline{v_l'\cdot v_m'}\cdot\frac{\partial\bar v_l}{\partial x_m}}_{\text{produzione}}\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\overline{v_m'\rho\frac12v_l'v_l'}+\overline{v_l'p'}-\mu\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac12\overline{v_i'\cdot v_i'}\right)\right]}_{\text{ridistribuzione}}\underbrace{-\mu\cdot\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}}}_{\text{dissipazione}}$$

La produzione trasferisce l'energia dal moto medio alla turbolenza grazie ai macrovortici (di dimensioni confrontabili con quelle del moto medio). La redistribuzione agisce solo se c'è flusso di energia attraverso la superficie del volume considerato. Ridistribuisce, appunto, l'energia da un punto a maggior turbolenza a uno a minore. Va intesa come una divergenza. Integrando sul volume:

$$\frac{d}{dt}\int_V E_{ct}\,dV = \int_V\left(-\rho\overline{v_l'\cdot v_m'}\,\frac{\partial\bar v_l}{\partial x_m}-\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}\,\frac{\partial v_i'}{\partial x_l}}\right)dV-\int_S\left[\overline{p'v_l'}+\overline{v_m'\rho\frac12v_l'v_l'}-\mu\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac12\overline{v_i'\cdot v_i'}\right)\right]n_l\,dS$$

Se fosse possibile trovare direttamente E_{ct} potremmo interpretare correttamente la turbolenza. Invece si usano i modelli per determinare E_{ct}! L'ultimo termine (dissipazione) rappresenta la dissipazione di energia per unità di volume.

L'energia cinetica del moto medio

Consideriamo l'equazione di Cauchy e moltiplichiamola per $\overline{v_j}$:

$$\rho \overline{v_j} \cdot \frac{d\overline{v_j}}{dt} = \rho \overline{v_i} f_i + \overline{v_i} \frac{\partial T_{il}}{\partial x_l} \qquad T_{il} = T_{il}^{visc} + T_{il}^{turb}$$

Integriamo sul volume modificando la derivata di T_{il} in modo da ottenere due termini (si sfrutta come al solito la derivata del prodotto):

$$\int_V \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\overline{v_j}\,\overline{v_j}\right) dV = \int_V \left[\rho \overline{v_i} f_i + \frac{\partial}{\partial x_l}(\overline{v_i} \cdot T_{il}) - T_{il} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l}\right] dV =$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{1}{2}\rho \overline{v_j}\,\overline{v_j}\, dV = \int_V \rho \overline{v_i} \cdot f_i\, dV + \int_S \overline{v_i}\, T_{il}\, n_l\, dS - \int_V T_{il} \cdot \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l} dV =$$

$$= \int_V \rho \overline{v_i} f_i\, dV + \int_S \overline{v_i} \cdot t_i\, dS - \int_V T_{il}^{visc} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l} dV - \int_V T_{il}^{turb} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l} dV$$

Con $T_{il}^{turb} = -\rho \overline{v_i' v_l'}$ e $\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{v_l}}{\partial x_i}\right) = \overline{D_{il}}$. L'integrale che contiene tali due termini rappresenta la potenza trasferita dal moto medio alla turbolenza. I macrovortici estraggono energia dal moto medio e la trasferiscono a vortici via via più piccoli. Solo quando si raggiunge una dimensione sufficientemente piccola è possibile dissipare l'energia estratta. A primo membro troviamo la derivata dell'energia cinetica del moto medio. A secondo membro sono anche presenti la potenza per unità di volume dovuta alle forze di massa (integrale contenente f_i), quella dovuta alle forze di superficie (integrale su S) e quella dissipata dalla viscosità (integrale contenente T_{il}).